



TITLE:

Simplicity of Generic Structures (Generic structures and their applications)

AUTHOR(S):

池田, 宏一郎

CITATION:

池田, 宏一郎. Simplicity of Generic Structures (Generic structures and their applications).
数理解析研究所講究録 2004, 1390: 9-17

ISSUE DATE:

2004-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/25826>

RIGHT:

Simplicity of Generic Structures

池田宏一郎

(Koichiro IKEDA)

法政大学経営学部

(Faculty of Business Administration, Hosei University)

Ehud Hrushovski は generic な構成法を用いて

(a) ([3], 1988 年) ω -categorical, strictly stable, non locally modular な graph ;

(b) ([4], 1997 年) ω -categorical, simple $SU=1$, non locally modular な hypergraph ,

を作った. (a) は「 ω -categorical で stable な理論は ω -stable になる」という Lachlan 予想の反例になっている. (b) は「 ω -categorical で $\text{rank}=1$ ならば locally modular になる」という Cherlin-Zilber の結果が simple theory の場合には成り立たないことを示している.

(a) と (b) はそれぞれ, 言語が二項関係と三項関係の違いがあるが, 共に generic な構成法で作られている. しかし, 厳密には多少の違いがあつて, ここでは (a) の構成法を (δ, \leq) -generic, (b) の構成法を $(\delta, <)$ -generic, と呼んでいる.

ここでは主に $(\delta, <)$ -generic graph を扱い, さらに, どのような条件下で simple になるかを調べた. そして最後に, ω -categorical, simple, non locally modular なグラフの例を紹介する. なお, generic 構造の一般的な議論に関して [1, 2, 7, 8] を参考にした.

1 $(K, <)$ -generic なグラフ

$R(*, *)$ を非反射的かつ対称的な二項関係とする. 特に断らないかぎり, A, B, C, \dots は R -構造, つまり, グラフを表すものとする. また, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$ は有限グラフを表すものとする.

定義 1.1 α を正の実数とする. このとき有限グラフのクラスから実数への関数 $\delta(*)$ を次のように定義する:

$$(i) \delta_\alpha(\bar{a}) = \alpha|\bar{a}| - |R^{\bar{a}}|$$

更に略記法として,

$$(ii) \delta_\alpha(\bar{a}/\bar{b}) = \delta_\alpha(\bar{a}\bar{b}) - \delta_\alpha(\bar{b}).$$

注意 1.2 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ が $\bar{a} \cap \bar{c} = \emptyset, \bar{b} \subset \bar{c}$ をみたすとき, $\delta_\alpha(\bar{a}/\bar{b}) \geq \delta_\alpha(\bar{a}/\bar{c})$.

証明: $|R^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} - R^{\bar{c}}| \leq |R^{\bar{a}\bar{b}} - R^{\bar{b}}|$ よりあきらか.

定義 1.3 $\bar{a} \subset \bar{b}$ とする. このとき, \bar{a} が \bar{b} で閉とは, 任意の空でない真部分集合 $\bar{x} \subset \bar{b} - \bar{a}$ に対して $\delta_\alpha(\bar{x}/\bar{a}) > 0$ となることである. 記号で $\bar{a} <_\alpha \bar{b}$ と書く. α が自明なときは省略する場合もある.

注意 1.4 (i) $\bar{a} < \bar{b}$ ならば, 任意の \bar{x} に対して $\bar{x} \cap \bar{a} < \bar{x} \cap \bar{b}$.

(ii) $\bar{a}, \bar{b} < \bar{c}$ ならば $\bar{a} \cap \bar{b} < \bar{c}$.

証明: (i) $\bar{y} \subset \bar{x} \cap \bar{b} - \bar{x} \cap \bar{a}$ を勝手にとる. このとき注意 1.2 より $\delta_\alpha(\bar{y}/\bar{x} \cap \bar{a}) \geq \delta_\alpha(\bar{y}/\bar{a}) > 0$.

(ii) (i) より $\bar{a} \cap \bar{b} < \bar{b}$ であるので, $\bar{b} < \bar{c}$ より $\bar{a} \cap \bar{b} < \bar{c}$.

定義 1.5 (i) $K_\alpha = \{\bar{b} : \text{任意の } \bar{a} \subset \bar{b} \text{ に対して } \delta_\alpha(\bar{a}) > 0\}$.

正の実数 r に対して,

(ii) 自然数から実数への関数 f_r を $f_r(x) = \log_r(x) + 1$;

(iii) $H_r = \{(x, y) : y \geq f_r(x)\}$;

(iv) $K_{\alpha, r} = \{\bar{b} \in K_\alpha : \text{任意の } \bar{a} \subset \bar{b} \text{ に対して } (|\bar{a}|, \delta_\alpha(\bar{a})) \in H_r\}$.

注意 1.6 あきらかに, $K_\alpha, K_{\alpha, r}$ は部分クラスに関して閉じている.

定義 1.7 $\bar{a} \subset \bar{b} \cap \bar{c}$ をみたすとする. このとき \bar{b} と \bar{c} が \bar{a} 上自由 (free) であるとは, $\bar{a} = \bar{b} \cap \bar{c}$ かつ $R^{\bar{b}} \cup R^{\bar{c}} = R^{\bar{b}\bar{c}}$ をみたすことである.

定義 1.8 K を部分グラフに関して閉じている K_α の部分クラスとする.

(i) $(K, <)$ が融合性 (Amalgamation property) をもつとは, $\bar{a} < \bar{b} \in K, \bar{a} < \bar{c} \in K$ に対して, 次の条件をみたす $\bar{b}', \bar{c}', \bar{d}$ が存在することである:

- (1) $\bar{b}' \cong_{\bar{a}} \bar{b}, \bar{c}' \cong_{\bar{a}} \bar{c}$;
 (2) $\bar{b}', \bar{c}' < \bar{d} \in K$.
 (ii) (i)において, \bar{b}' と \bar{a}' が \bar{a} 上自由で $\bar{d} = \bar{b}'\bar{a}'$ となる \bar{d} がとれるときに,
 $(K, <)$ は自由融合性をもつという.

補題 1.9 α が整数, $r \geq 2 \Rightarrow (K_{\alpha, r}, <)$ は自由融合性をもつ.

証明: $\bar{a} < \bar{b} \in K_{\alpha, r}, \bar{a} < \bar{c} \in K_{\alpha, r}$ を満たす $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ を勝手にとる. このとき \bar{b} と \bar{c} は \bar{a} 上自由であると仮定して構わない. $\bar{d} = \bar{b} \cup \bar{c}$ とする.

主張 1 : $\bar{b}, \bar{c} < \bar{d}$.

証明: 空でない真部分集合 $\bar{x} \subset \bar{d} - \bar{b}$ に対して, $\delta(\bar{x}/\bar{b}) = \delta(\bar{x}/\bar{a}) > 0$ であるので $\bar{b} < \bar{d}$. $\bar{c} < \bar{d}$ に関しても同様.

主張 2 : $\bar{d} \in K_{\alpha, r}$

証明: $\bar{x} \subset \bar{d}$ を勝手にとる. $|\bar{x} \cap \bar{c}| \leq |\bar{x} \cap \bar{b}|$ として一般性を失わない. ここで, $\bar{b} \in K_{\alpha, r}$ より $\delta(\bar{x} \cap \bar{b}) > \log_r(|\bar{x} \cap \bar{b}|) + 1$. さらに主張 1 より $\delta(\bar{x}) > \delta(\bar{x} \cap \bar{b})$ がなりたつことに注意する. このとき, $|\bar{x}| \leq 2|\bar{x} \cap \bar{b}| \leq r|\bar{x} \cap \bar{b}| \leq r \cdot r^{\delta_{\alpha}(\bar{x} \cap \bar{b}) - 1} = r^{\delta_{\alpha}(\bar{x} \cap \bar{b})} \leq r^{\delta_{\alpha}(\bar{x}) - 1}$. よって $\delta_{\alpha}(\bar{x}) > \log_r(|\bar{x}|)$ であるので, $\bar{x} \in K_{\alpha, r}$.

定義 1.10 M を無限グラフ, $\bar{a} \in M$ とする. このとき \bar{a} が M で閉 (記号: $\bar{a} < M$) であるとは, 任意の $\bar{x} \in M$ に対して $\bar{a} < \bar{a} \cup \bar{x}$ が成り立つことである.

定義 1.11 K を部分グラフに関して閉じている K_{α} の部分クラスとする. このとき, 可算グラフ M が $(K, <)$ -generic であるとは,

- (i) $\bar{a} \in M$ ならば $\bar{a} \in K$;
 (ii) $\bar{a} < \bar{b} \in K, \bar{a} < M$ のとき, \bar{b} の \bar{a} 上のコピー \bar{b}' が存在して $\bar{b}' < M$.

補題 1.12 M を有限部分グラフがすべて $K_{\alpha, r}$ の元になっているような無限グラフとする. このとき M は有限閉包をもつ. すなわち, 任意の $\bar{a} \in M$ に対して, $\bar{a} \subset \bar{b} < M$ をみたす有限な \bar{b} で最小のものが存在する. (この \bar{b} を \bar{a} の M における閉包といい, $\text{cl}_M(\bar{a})$ と書く. M が自明な場合は省略する場合がある.)

証明: $\bar{a} \in M$ を勝手にとる. f_r が単調増加であることより, $\bar{a} \subset \bar{b} < M$ をみたす有限な \bar{b} が存在する. \bar{b}_0, \bar{b}_1 をそれぞれそのようなもので極小な

ものとする. このとき注意 1.4(ii) より $\bar{b}_0 \cap \bar{b}_1 < M$ が成り立つ. よって極小性より $\bar{b}_0 = \bar{b}_1$ となるので, 最小な \bar{b} が存在する.

補題 1.13 $K \subset K_{\alpha,r}$ が融合性をもつならば, $(K, <)$ -generic な M が一意的に存在する.

証明: 融合性より generic グラフの存在はほぼ明らか. 一意性に関しては次の通り: M, N を generic グラフ, $\bar{a} < M, \bar{b} < N, \bar{a} \cong \bar{b}$ とする. あらかじめ並べておいた M の元達の中で \bar{a} をのぞいて一番小さい元 a をとってくる. このとき $a\bar{a}$ の閉包を \bar{a}_1 とすると, N が generic グラフであることより, \bar{a}_1 のコピー \bar{b}_1 が N の中にとれる. 往復論法でこの操作を繰り返すと $M \cong N$.

注意 1.14 補題 1.13 の $(K, <)$ -generic な M は ω -categorical.

証明: N を $N \equiv M$ をみたす可算モデルとする. f_r が単調増加関数であることより, generic という性質が第一階の論理式たちで表現できる. よって N は generic となるので, 往復論法より $N \cong M$.

以上のことより, 次の命題が得られる.

命題 1.15 α が整数, $r \geq 2$ ならば, $(K_{\alpha,r}, <)$ -generic なグラフが一意的に存在し, その理論は ω -categorical になる.

例 1.16 (Hrushovski の unstable generic なグラフ) $r = e, \alpha = 2$ とする. このとき命題 1.15 より, $(K, <)$ -generic なグラフ M が存在して, その理論は ω -categorical となる.

主張 1: 任意の $a \in M$ に対して $R(a, b)$ をみたす $b \in M$ が無限個存在する.

証明: $(4, 3) \in H_r$ なので.

主張 2: 異なる $a, b \in M$ に対して $R(a, c) \wedge R(b, c)$ をみたす $c \in M$ は高々 1 個である.

証明: $(8, 4) \notin H_r$ なので.

よって, M の元 a, b に対して $a \in b \Leftrightarrow R(a, b)$ と定義すると, (M, M, ϵ) は擬平面になる. よって $\text{Th}(M)$ は non-locally modular となる. さらに $\text{Th}(M)$ は unsimple であることもわかる (はずである).

2 独立関係と simplicity

仮定 α を整数, $K \subset K_{\alpha, r}$ は自由融合性をもつとする. M を $(K, <)$ -generic なグラフとして固定する.

注意 2.1 $\bar{a} < \bar{b}_1, \bar{b}_2 < M$ かつ $\bar{b}_1 \cong_{\bar{a}} \bar{b}_2$ ならば $\text{tp}(\bar{b}_1/\bar{a}) = \text{tp}(\bar{b}_2/\bar{a})$.

定義 2.2 有限グラフのクラスから実数への関数 $d_M(*)$ を次のように定義する:

(i) $d_M(\bar{a}) = \delta(\text{cl}_M(\bar{a}))$;

M が自明なときは省略する場合もある. また, 略記法として

(ii) $d_M(\bar{a}/\bar{b}) = d_M(\bar{a} \cup \bar{b}) - d_M(\bar{b})$.

(iii) B が無限のとき, $d(\bar{a}/B) = \inf\{d(\bar{a}/\bar{b}) : \bar{b} \in B\}$.

注意 2.3 $A \subset B$ ならば $d(\bar{a}/A) \geq d(\bar{a}/B)$.

証明: A, B が有限である場合を証明すれば十分. $A^* = \text{cl}(\bar{a}A) \cap \text{cl}(B)$ とおくと $\text{cl}(A) < A^*$. 注意 1.2 より, $d(\bar{a}/A) = \delta(\text{cl}(\bar{a}A)) - \delta(\text{cl}(A)) \geq \delta(\text{cl}(\bar{a}A)) - \delta(A^*) = \delta(\text{cl}(\bar{a}A) - A^*/A^*) \geq \delta(\text{cl}(\bar{a}A) - A^*/\text{cl}(B)) = \delta(\text{cl}(\bar{a}A)\text{cl}(B)) - \delta(\text{cl}(B)) \geq d(\bar{a}/B)$.

定義 2.4 $\bar{a}, \bar{b} \in M, C \subset M$ とする.

(i) \bar{a} と \bar{b} が C 上独立 (記号: $\bar{a} \downarrow_C \bar{b}$) とは, $d(\bar{a}/C\bar{b}) = d(\bar{a}/C)$ をみたすことである.

(ii) 任意の $\bar{a} \in A$ と $\bar{b} \in B$ に対して, $\bar{a} \downarrow_C \bar{b}$ のとき, $A \downarrow_C B$ と書く.

補題 2.5 $\bar{a} < \bar{b}, \bar{c} < M$ とする. このとき $\bar{b} \downarrow_{\bar{a}} \bar{c}$ ならば,

(i) $\bar{b} \cap \bar{c} = \bar{a}$;

(ii) \bar{b} と \bar{c} は \bar{a} 上自由;

証明： $\bar{a}^* = \bar{b} \cap \bar{c}$ とおく。注意より、 $d(\bar{b}/\bar{a}) = \delta(\bar{b}/\bar{a}) = \delta(\bar{b}) - \delta(\bar{a}) \geq \delta(\bar{b}) - \delta(\bar{a}^*) = \delta(\bar{b} - \bar{a}^*/\bar{a}^*) = \delta(\bar{b} - \bar{a}^*/\bar{c}) = \delta(\bar{b}/\bar{c}) \geq d(\bar{b}/\bar{c})$ 。仮定より $d(\bar{b}/\bar{a}) = d(\bar{b}/\bar{c})$ であるので、 $\delta(\bar{a}^*) = \delta(\bar{a})$ 。 $\bar{a} < M$ であるので、 $\bar{a}^* = \bar{a}$ より (i) が成り立つ。さらに、 $\delta(\bar{b}/\bar{a}) = \delta(\bar{b}/\bar{c})$ であるので、(ii) も成り立つ。

注意 2.6 上の補題において、 $\bar{b}\bar{c} < M$ が成り立つとはかぎらないが、 $d(\bar{a}\bar{b}) = \delta(\bar{a}\bar{b})$ は成り立つ。

補題 2.7 関係 “ $* \downarrow_* *$ ” は以下をみたす：

- (i) (対称性) $\bar{a} \downarrow_A \bar{b}$ ならば $\bar{b} \downarrow_A \bar{a}$;
- (ii) (推移性) $\bar{a} \downarrow_A BC \Leftrightarrow \bar{a} \downarrow_A B$ かつ $\bar{a} \downarrow_{AB} C$;
- (iii) (存在) $\bar{a}' \downarrow_A B$ をみたす $\text{tp}(\bar{a}/A)$ の解 \bar{a}' が存在する；
- (iv) (局所性) $\bar{a} \downarrow_{A_0} A$ をみたす可算な $A_0 \subset A$ が存在する；
- (v) (有限性) $\bar{a} \downarrow_A B \Leftrightarrow$ 任意の $\bar{b} \in B$ に対して $\bar{a} \downarrow_A \bar{b}$ 。

証明： (i) $d(\bar{b}/A\bar{a}) = d(\bar{b}/A)$ を示す。そうでないとすると、ある $\bar{x} \in A$ が存在して $d(\bar{b}/\bar{x}\bar{a}) < d(\bar{b}/A)$ 。 $\epsilon = d(\bar{b}/A) - d(\bar{b}/\bar{x}\bar{a})$ とおく。仮定より $d(\bar{a}/A\bar{b}) = d(\bar{a}/A)$ であるので、 $d(\bar{a}/\bar{y}) - d(\bar{a}/\bar{y}\bar{b}) < \epsilon$ となる $\bar{y} \in A$ が存在する。 $\bar{y} \cap \bar{x}$ が成り立っているとして構わない。このとき、 $d(\bar{b}/A) = d(\bar{b}/\bar{x}\bar{a}) + \epsilon \geq d(\bar{b}/\bar{y}\bar{a}) + \epsilon = d(\bar{b}/\bar{y}) + d(\bar{a}/\bar{y}\bar{b}) - d(\bar{a}/\bar{y}) + \epsilon > d(\bar{b}/\bar{y})$ 。これは矛盾。

(ii) 明らか。

(iii) コンパクト性より、 A, B が有限のときに示せば十分。 X として、 $X \cong_{\text{cl}(A)} \text{cl}(\bar{a}A)$ かつ、 $\text{cl}(A)$ 上 X と $\text{cl}(AB)$ が自由なものをとる。自由融合性より $X\text{cl}(ab) \in K$ が成り立つ。よって M の genericity より、 $(X <) X\text{cl}(AB) < M$ が成り立っているとして構わない。 X の中で \bar{a} に対応するものを \bar{a}' とする。注意より $\text{tp}(\bar{a}/A) = \text{tp}(\bar{a}'/A)$ 。さらに、 $d(\bar{a}'/AB) = \delta(\text{cl}(\bar{a}'AB)) - \delta(\text{cl}(AB)) = \delta(X\text{cl}(AB)) - \delta(\text{cl}(AB)) = \delta(X/\text{cl}(AB)) = \delta(X/\text{cl}(A)) = d(\bar{a}'/A)$ であるので $\bar{a}' \downarrow_A B$ 。

(iv) $d(\bar{a}/A) = \inf_{\bar{b} \in A} d(\bar{a}/\bar{b})$ であるので、ある可算近似列を $(\bar{b}_i)_i$ とする。このとき $B = \bigcup \bar{b}_i$ とすれば、 $d(\bar{a}/B) = d(\bar{a}/A)$ 。よって $\bar{a} \downarrow_A B$ 。

(v) ほぼ明らか。

定義 2.8 以下の条件をみたすとき、関係 “ $* \downarrow_* *$ ” は **Independence Theorem** をもつという：任意の $\bar{c} < \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2 < M$ に対して、

$$\bar{a}_1 \downarrow_{\bar{c}} \bar{a}_2, \bar{b}_1 \downarrow_{\bar{c}} \bar{a}_1, \bar{b}_2 \downarrow_{\bar{c}} \bar{a}_1;$$

- $\text{tp}(\bar{b}_1/\bar{c}) = \text{tp}(\bar{b}_2/\bar{c})$
- をみたすならば,
- $\bar{b} \downarrow_{\bar{c}} \bar{a}_1 \bar{a}_2$;
- $\text{tp}(\bar{b}/\bar{a}_1) = \text{tp}(\bar{b}_1/\bar{a}_1), \text{tp}(\bar{b}/\bar{a}_2) = \text{tp}(\bar{b}_2/\bar{a}_2)$.
- をみたす \bar{b} が存在する.

補題 2.9 $r \geq 3 \Rightarrow$ Independence Theorem がなりたつ.

証明: 簡単のため, $\bar{c} = \emptyset$ とする. $A = \text{cl}(\bar{a}_1 \bar{a}_2)$ とする. 仮定より \bar{a}_1 と \bar{b}_1 , \bar{a}_2 と \bar{b}_2 , \bar{a}_1 と \bar{a}_2 , はそれぞれ自由であるので, \bar{b} を

- $\bar{b} \cong_{\bar{a}_i} \bar{b}_i$;
- \bar{b} と $\bar{a}_1 \bar{a}_2$ は自由,

となるように取ることができる. さらに B_1, B_2 を

- $B_i \bar{a}_i \bar{b} \cong \text{cl}(\bar{a}_i \bar{b}_i) \bar{a}_i \bar{b}_i$

となるようにとる. $D = B_1 B_2 A$ とする. このとき, $\delta(D/A) = \delta(D - A)$, $\delta(D/B_i) = \delta(D - B_i)$ が成り立っているとして構わない. よって
主張 1: $A, B_1, B_2 < D$.

主張 2: $D \in K$.

証明: $X \subset D$ を勝手にとる. $X_0 = X \cap A, X_1 = X \cap B_1, X_2 = X \cap B_2$ とする. ここで $\delta(X_i)$ の値が一番大きいものを X_n とする. 主張 1 より $X_n < X$ であるので, $\delta(X_n) \leq \delta(X) - 1$ が成り立つ. よって $r \geq 3$ より, $|X| \leq |X_0| + |X_1| + |X_2| \leq r^{\delta(X_0)-1} + r^{\delta(X_1)-1} + r^{\delta(X_2)-1} \leq 3 \cdot r^{\delta(X_n)-1} \leq r^{\delta(X_n)} \leq r^{\delta(X)-1}$ が成り立つ.

主張 1, 2 より, $D < M$ であると思って構わない.

主張 3: $\bar{b} \downarrow_{\bar{a}_1 \bar{a}_2}$.

証明: $d(\bar{b}/\bar{a}_1 \bar{a}_2) = \delta(D/A) = \delta(D - A/A) = \delta(D - A) \geq \delta(\bar{b}) = d(\bar{b})$.
よって $d(\bar{b}/\bar{a}_1 \bar{a}_2) = d(\bar{b})$.

主張 4: $\text{tp}(\bar{b}/\bar{a}_i) = \text{tp}(\bar{b}_i/\bar{a}_i)$.

証明: $B_i \cong_{\bar{a}_i} \text{cl}(\bar{a}_i \bar{b}_i)$ かつ $B_i < M$ より.

注意 2.10 関係 “ $\ast \downarrow_\ast \ast$ ” が Independence Theorem をみたすとき,

- “ $\ast \downarrow_\ast \ast$ ” は forking independence ;
- $\text{Th}(M)$ は simple,

になることが知られている.

以上のことより次が得られる.

命題 2.11 α が整数, $r \geq 3$ ならば, $(K_{\alpha,r}, <)$ -generic なグラフが一意的に存在し, その理論は ω -categorical かつ simple になる.

3 $(\delta, <)$ -generic なグラフ

定義 3.1 無限グラフ M が $(\delta, <)$ -generic であるとは, 次の条件をみたす実数 α と $K \subset K_\alpha$ が存在することである:

- (i) M が $(K, <)$ -generic;
- (ii) M は有限閉包;
- (iii) M は飽和モデル.

注意 3.2 例 1.16 のグラフは $(\delta, <)$ -generic である.

注意 3.3 いま, 有限グラフ $A \subset B$ に対して, 勝手に $X \subset B - A$ を取ったときに $\delta_\alpha(X/A) \geq 0$ をみたすとき, $A \leq B$ と書く. このとき, 関係 $A < B$ のときと同様に, (δ, \leq) -generic な無限グラフが定義できる ([5]).

事実 3.4 ([6]) M を (δ, \leq) -generic なグラフとする. このとき

- (i) $\text{Th}(M)$ は stable;
- (ii) α が無理数ならば $\text{Th}(M)$ は superstable でない.

注意 3.5 無限グラフ M が $(\delta, <)$ -generic であるとき, α が無理数ならば $\text{Th}(M)$ は strictly stable となる.

証明: α が無理数のとき, $(\delta, <)$ -generic なグラフは (δ, \leq) -generic になる. よって事実 3.4 より $\text{Th}(M)$ は strictly stable.

問題 3.6 M を $(\delta, <)$ -generic なグラフとする. このとき

- (1) α が有理数のとき M は unstable か?
- (2) M は ω -categorical か?

例 3.7 $r = 3, \alpha = 2$ とする. $K = K_{\alpha, r}$ とすると, 命題 2.11 より, $(K, <)$ -generic なグラフ M が存在して, その理論は ω -categorical かつ simple になる. 特に M は $(\delta, <)$ -generic になっている. また, $SU > 1$, unstable であることも確かめられる (はずである).

主張: $\text{Th}(M)$ は non locally modular.

証明: $X = abcd$ を $R(a, b), R(b, c), R(c, d), R(d, a)$ のみを関係としてもつグラフとする. このとき $X \in K$ であるので, $X < M$ であると仮定して構わない. このとき $d(ab) + d(cd) = \delta(ab) + \delta(cd) = 6$ である. 一方, $d(\text{cl}(ab) \cap \text{cl}(cd)) + d(abcd) = d(\emptyset) + \delta(abcd) = 4$ である. よって modular ではない. locally modular でないことも, ほぼ同様に証明できる.

参考文献

- [1] J. T. Baldwin and N. Shi, Stable generic structures, *Annals of Pure and Applied Logic* 79 (1996) 1–35
- [2] J. Goode, Hrushovski's geometries, in: Helmut Wolter Bernd Dahn, ed., *Proc. 7th Easter Conf. on Model Theory* (1989) 106–118
- [3] E. Hrushovski, A stable \aleph_0 -categorical pseudoplane, preprint, 1988
- [4] E. Hrushovski, Simplicity and the Lascar group, preprint, 1997
- [5] K. Ikeda, A note on generic projective planes. *Notre Dame J. Formal Logic* 43 (2002), no. 4, 249–254
- [6] K. Ikeda, Stability of generic pseudoplanes, 京都大学数理解析研究所講究録 1344 (2003) 33–39
- [7] F. O. Wagner, Relational structures and dimensions, Kaye, Richard (ed.) et al., *Automorphisms of first-order structures*. Oxford: Clarendon Press. 153–180 (1994)
- [8] F. O. Wagner, Simple theories. *Mathematics and its Applications*, 503. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000. xii+260 pp.